BÀI 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

+ Nắm vững định nghĩa cực trị của hàm số, khái niệm điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số; điểm cực trị của đồ thị hàm số.
+ Hiểu và vận dụng được các định lí về điều kiện cần và điều kiện đủ để hàm số có cực trị.
+ Trình bày và vận dụng được các cách tìm cực trị của một hàm số.
+ Nhận biết được các điểm cực trị trên đồ thị hàm số.

❖ **Kĩ năng**

+ Thành thạo tìm điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số đã biết.
+ Biết cách khai thác bảng biến thiên, bảng xét dấu, đồ thị để tìm cực trị.

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Khái niệm cực trị của hàm số

Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên $K\left(K\subset\mathbb{R}\right)$ và $x_0\in K$

a) x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số *f* nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)\subset K$ chứa điểm x_0 sao cho $f\left(x\right)<f\left(x_0\right),\forall x\in\left(a;b\right)\setminus\left\{x_0\right\}$.

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số *f*.

b) x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số *f* nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)\subset K$ chứa điểm x_0 sao cho $f\left(x\right)>f\left(x_0\right),\forall x\in\left(a;b\right)\setminus\left\{x_0\right\}$.

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số *f*.

Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lí 1

Giả sử hàm số *f* đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu *f* có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'\left(x_0\right)=0$.

Chú ý:

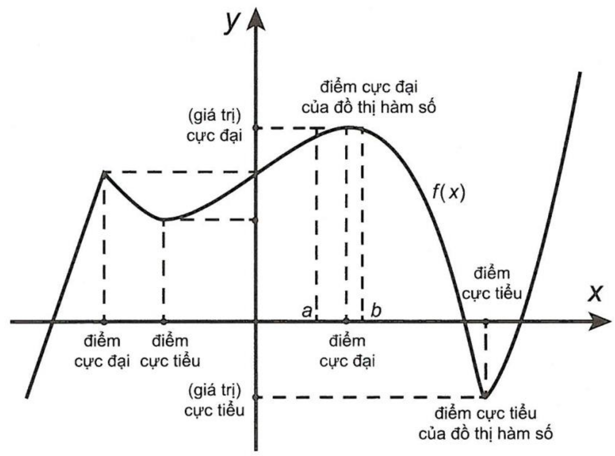
1) Điều ngược lại có thể không đúng. Đạo hàm f' có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số *f* không đạt cực trị tại điểm x_0.

Chú ý:

1) Điểm cực đại (cực tiểu) x_0 được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại (cực tiểu) $f\left(x_0\right)$ của hàm số được gọi chung là cực trị. Hàm số có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập hợp K.

2) Nói chung, giá trị cực đại (cực tiểu) $f\left(x_0\right)$ không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập K; $f\left(x_0\right)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên một khoảng $\left(a;b\right)$ chứa x_0.

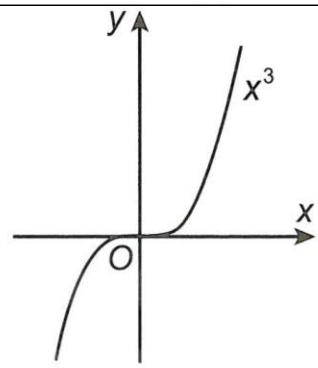
3) Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số f.



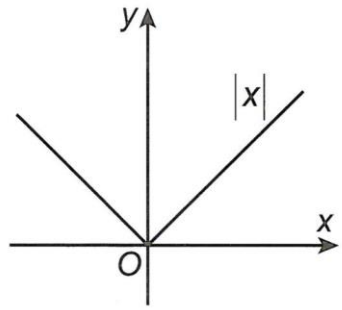
Ví dụ 1: *Hàm số $y=f\left(x\right)=\left|x\right|$ xác định trên $\mathbb{R}$. Vì $f\left(0\right)=0$ và $f\left(x\right)>0,\forall x\neq0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$ dù hàm số không có đạo hàm tại điểm x = 0, vì:*

$$y=\left|x\right|=\begin{cases}x,x\geq0\\x,x<0\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}1,x>0\\-1,x<0\end{cases}.$$

Ví dụ 2: *Ta xét hàm số $f\left(x\right)=x^3$, ta có: $f'\left(x\right)=3x^2>0,\forall x\neq0$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không có cực trị dù $f'\left(0\right)=0$.*



2) Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.



Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí 2

a) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$ (cực tiểu)	↗	

b) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$ (cực đại)	↘	

Định lí 3

Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0)=0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

a) Nếu $f''(x_0)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

b) Nếu $f''(x_0)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Nếu $f''(x_0)=0$ thì ta chưa thể kết luận được, cần lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu đạo hàm.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Các bài tập nhận biết, tìm điểm cực trị, đếm số điểm cực trị

Bài toán 1: Tìm điểm cực trị của hàm số cụ thể

Phương pháp giải

Cách 1: Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu

Bước 1. Tìm $f'(x)$

Bước 2. Tìm các điểm $x_i\ (i=1,2,...)$ tại đó đạo hàm bằng không hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

Bước 3. Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_i thì hàm số đạt cực trị tại điểm x_i.

Cách 2: Dùng định lý 3

Bước 1: Tìm $f'(x)$

Bước 2: Tìm các nghiệm $x_i\ (i=1,2,...)$ của phương trình $f'(x)=0$.

Bước 3: Tính $f''(x_i)$

- Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.
- Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.
- Nếu $f''(x_i)=0$ thì ta lập bảng biến thiên

Ví dụ 1: Hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=-1$. **B.** $x=3$.

C. $x=1$. **D.** $x=-3$.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=3x^2-6x-9$.

Từ đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực điểm tại điểm $x=3$.

Chọn B.

Cách 2:

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=3x^2-6x-9$.

Từ đó: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có: $f''(x)=6x-6$. Khi đó:

$f''(-1)=-12<0;\ f''(3)=12>0.$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=3$.

để xác định điểm cực trị.	

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Số điểm cực đại của hàm số $f\left(x\right)=-x^4+8x^2-7$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'\left(x\right)=-4x^3+16x$.

Từ đó: $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow f\left(0\right)=-7\\x=-2\Rightarrow f\left(-2\right)=9\\x=2\Rightarrow f\left(2\right)=9\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	-7	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số có hai điểm cực đại.

Chọn C.

Ví dụ 2: Số cực trị của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x-1}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{-2}{\left(x-1\right)^2}<0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$. Vậy hàm số không có cực trị.

Chọn D.

Ví dụ 3: Giá trị cực tiểu của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{-x^2+2x+7}{x^2+x+1}$ là

A. $x=-5$. **B.** $y=-\dfrac{4}{3}$. **C.** $x=-\dfrac{1}{3}$. **D.** $y=8$.

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{-3x^2-16x-5}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

Từ đó: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{3} \\ x=-5 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu đạo hàm:

x	$-\infty$		-5		$-1/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=-5, y_{CT}=f(-5)=-\frac{4}{3}$.

Chọn B.

Ví dụ 4: Số cực trị của hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}$.

Từ đó: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x^3-3x+2\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$

($f'(x)$ không xác định tại điểm $x=1$ và $x=-2$).

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số có hai cực trị là $f(-1)=\sqrt[3]{4}$ và $f(1)=0$.

Chọn A.

Ví dụ 5: Giá trị cực đại của hàm số $f(x)=x-2\sqrt{x^2+1}$ là số nào dưới đây?

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $-\sqrt{3}$. **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=1-\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Từ đó: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=2x \Leftrightarrow \begin{cases}2x\ge 0\\ x^2+1=4x^2\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, giá trị cực đại của hàm số là $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

Chọn C.

Ví dụ 6: Các điểm cực đại của hàm số $f(x)=x-2\sin x$ có dạng (với $k\in\mathbb{Z}$)

A. $x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$. **B.** $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$.

C. $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$. **D.** $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$.

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=1-2\cos x$. Khi đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

$f''(x)=2\sin x$

Vì $f''\left(\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\right)=2\sin\dfrac{\pi}{3}>0$ nên $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ là điểm cực tiểu.

Vì $f''\left(-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\right)=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\right)=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\sin\dfrac{\pi}{3}<0$ nên $x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ là điểm cực đại

Chọn A.

Bài toán 2. Tìm cực trị của hàm số khi biết đồ thị

Phương pháp giải

+) Nếu đề cho đồ thị của hàm $f(x)$, xem lại lý thuyết.

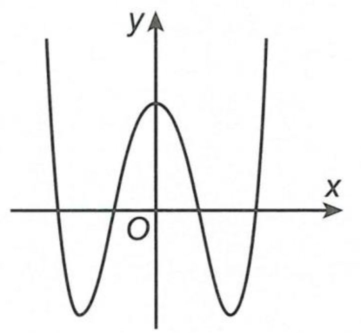
+) Nếu đề cho đồ thị của đạo hàm, để ý các điều sau để có thể lập được bảng xét dấu đạo hàm:

Đồ thị $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành: $f'(x)>0$.

Đồ thị $f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành: $f'(x)<0$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a,b,c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực tiểu của hàm số *f* là



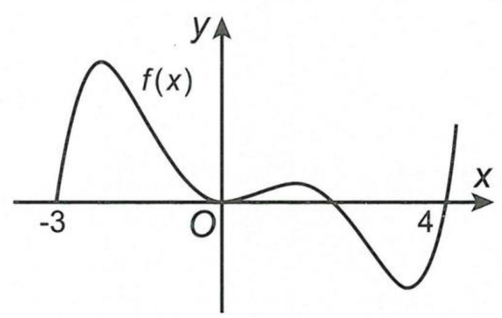
A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho có hai điểm cực tiểu.

Chọn C.

Ví dụ 2: Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số f trên khoảng $(-3;4)$ là



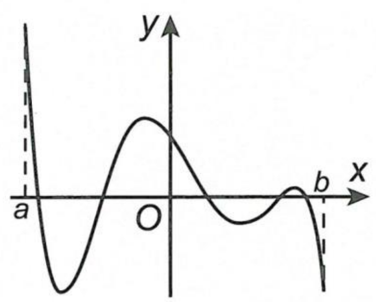
A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho có bốn điểm cực trị.

Chọn D.

Ví dụ 3: Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số f trên khoảng $(a;b)$ là



A. 5. **B.** 3.

C. 6. **D.** 4.

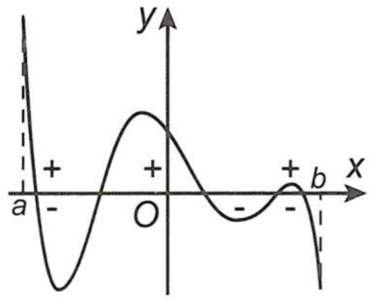
Hướng dẫn giải

Cách 1: Trong khoảng $(a;b)$, đồ thị $f'(x)$ cắt (không tiếp xúc) trục hoành tại 5 điểm nên có 5 điểm cực trị trên $(a;b)$.

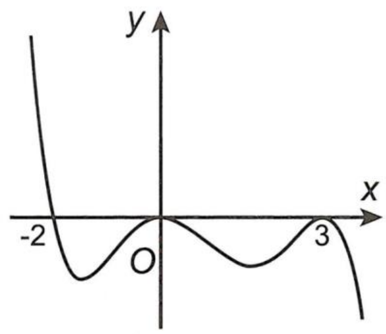
Chọn A.

Cách 2: Nhìn vào hình vẽ dưới đây, $f'(x)$ đổi dấu tổng cộng 5 lần trong khoảng $(a;b)$ nên có 5 điểm cực trị trên $(a;b)$.

Chọn A.



Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f''(x)$ như hình vẽ dưới đây (đồ thị $y = f''(x)$ chỉ có 3 điểm chung với trục hoành như hình vẽ). Số điểm cực trị tối đa của hàm số là



A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$	
$f'(x)$		↗			↘				

Nhận thấy trục hoành cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại tối đa 2 điểm nên $f'(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm phân biệt. Vậy hàm số $y = f(x)$ có tối đa 2 điểm cực trị.

Chọn D.

Bài toán 3. Tìm (điểm) cực trị thông qua bảng biến thiên

- **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số có hai điểm cực trị. **B.** Hàm số có hai cực trị.

C. Cực đại bằng – 1. **D.** Cực tiểu bằng – 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số có ba cực trị. **B.** Hàm số có một cực tiểu.

C. $f(-2) = f(2)$. **D.** $f(-1) < f(2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Bài toán 4. Tìm (điểm) cực trị thông qua đạo hàm

Phương pháp giải

Đếm số nghiệm bội lẻ của phương trình đạo hàm.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-1)(x^3-3x+2)(x^2-2x)$.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = (x-2)(x-1)^3x(x+1)(x+2)$ và $f'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ nên có 5 điểm cực trị.

Chọn D.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-4)^2$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left[f(x^2)\right]' = 2x.f'(x^2) = 2x^5(x^2-1)(x^2-4)^2$

Phương trình $\left[f(x^2)\right]' = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ là $x = 0, x = \pm 1$ nên số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$ là 3.

Chọn C.

Chú ý: *Nhắc lại:*

Đạo hàm của hàm số hợp $\left(f\left(u\left(x\right)\right)\right)' = f'\left(u\left(x\right)\right).u'\left(x\right)$ *hay* $f'_x = f'_u.u'_x$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(x) \geq 3x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{7}{2}, \forall x > 0$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có đúng một điểm cực trị trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số có ít nhất một điểm cực trị trên $(0;+\infty)$.

C. Hàm số không có điểm cực trị nào trên $(0;+\infty)$.

D. Hàm số có đúng hai điểm cực trị trên $\mathbb{R}$.

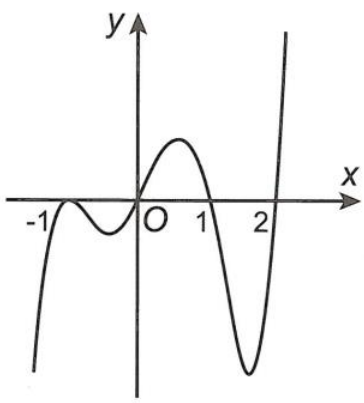
Hướng dẫn giải

Với $\forall x > 0$ ta có: $f'(x) \geq 3x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{7}{2} = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{7}{2} \geq 3\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} - \dfrac{7}{2} > 0$.

Vậy hàm số không có cực trị trên $(0;+\infty)$.

Chọn C.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x - 2)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)g(x)$ với $g(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ dưới đây ($g(x)$ đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và trên $(2;+\infty)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là



A. 5. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Dựa vào đồ thị, phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ là $x = 0, x = 1, x = 2$ và một nghiệm bội chẵn là $x = -1$.

Tóm lại, phương trình $y' = 0$ chỉ có $x = -1, x = 0, x = 2$ và $x = 3$ là nghiệm bội lẻ, nên hàm số có 4 điểm cực trị.

Chọn D.

Bài toán 5. Tìm (điểm) cực trị thông qua bảng xét dấu, bảng biến thiên của đạo hàm

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

x	$-\infty$		-5		$-1/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hướng dẫn giải

Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương 1 lần nên có 1 điểm cực tiểu.

Chọn A.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-5		-3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Đạo hàm đổi dấu hai lần nên có hai điểm cực trị.

Chọn C.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chắc chắn hàm số có 3 điểm cực trị là $x = -1, x = 2, x = 3$.

Xét tại điểm $x = 0$, đạo hàm đổi dấu, hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 0$, nhưng theo đề bài, hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(0)$ xác định. Vậy hàm số có tổng cộng 4 điểm cực trị.

Chọn D.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

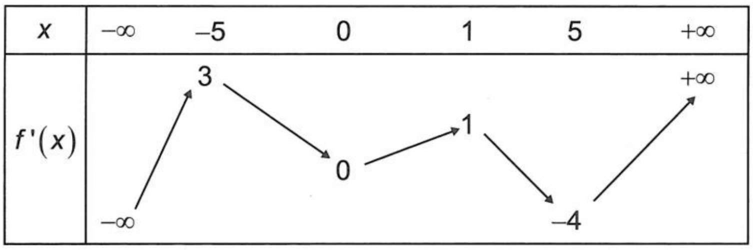
A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Hàm số có 3 điểm cực trị là $x = -2, x = 2, x = 3$ (hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 1$ vì hàm số không xác định tại điểm $x = 1$).

Chọn B.

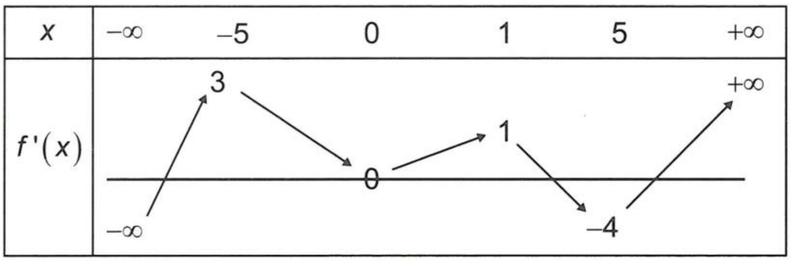
Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên của $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

Hướng dẫn giải



Dễ thấy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm bội lẻ nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn C.

Bài tập tự luyện dạng 1

Bài tập cơ bản

Câu 1: Hàm số $y = 2x^3 - x^2 + 5$ có điểm cực đại là

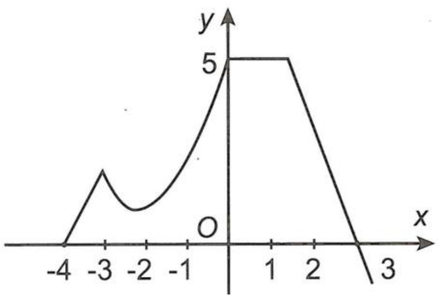
A. $x = \frac{1}{3}$. **B.** $x = 5$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = 0$.

Câu 2: Hàm số $y = x^4 - 4x^3 - 5$

A. nhận điểm x = 3 làm điểm cực tiểu. **B.** nhận điểm x = 0 làm điểm cực tiểu.

C. nhận điểm x = 0 làm điểm cực đại. **D.** nhận điểm làm điểm cực đại.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;3]$ và có đồ thị trên đoạn $[-4;3]$ như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 0. **B.** 2.

C. 1. **D.** 3.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = x^4$. Hàm số $g(x) = f'(x) - 3x^2 - 6x + 1$ đạt cực tiểu, cực đại lần lượt tại x_1, x_2. Tìm $m = g(x_1).g(x_2)$.

A. $m = 0$. **B.** $m = -\frac{371}{16}$. **C.** $m = \frac{1}{16}$. **D.** $m = -11$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

B. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và có một điểm cực tiểu.

C. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

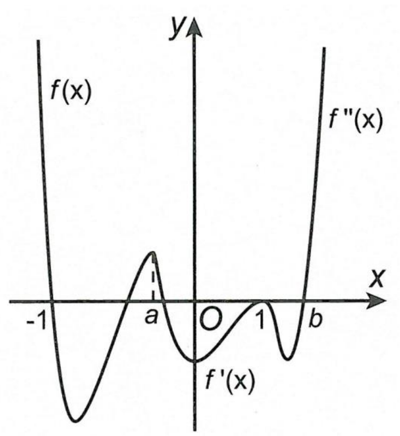
D. Hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 6: Hàm số dạng $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

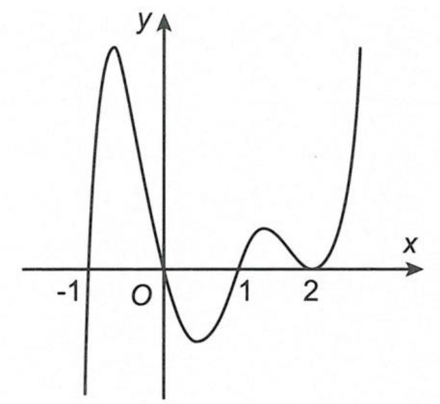
Bài tập nâng cao

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Trên hình vẽ là đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $\left(-\infty; a\right]$ (và hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\left(-\infty; -2\right]$), đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $\left[a; 1\right]$ đồ thị của hàm số $y = f''(x)$ trên $\left[1; +\infty\right)$ (và hàm số $y = f''(x)$ luôn đồng biến trên $\left[b; +\infty\right)$). Hàm số $y = f(x)$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



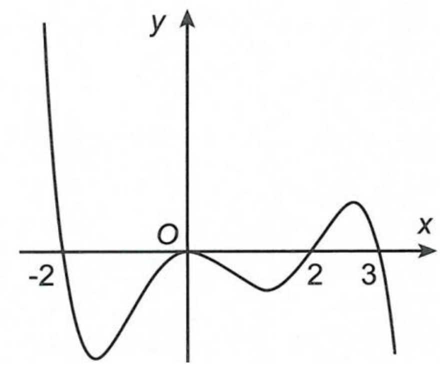
A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 3x + 2)(x - \sin x)g(x)$ với $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây ($g(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và trên $(2; +\infty)$). Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f''(x)$ như hình vẽ dưới đây (đồ thị $y = f''(x)$ chỉ có 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ). Số điểm cực trị tối đa của hàm số là



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Dạng 2: Cực trị hàm bậc ba

Bài toán 1. Hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại điểm cho trước

Phương pháp giải

Bước 1. Hàm số đạt cực đại (cực tiểu) tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$, tìm được tham số. ***Bước 2.*** Với giá trị tham số tìm được, ta thế vào hàm số ban đầu để thử lại. ***Chú ý:*** Đối với hàm bậc ba, ta có thể làm trắc nghiệm như sau:	**Ví dụ 1:** Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 4\right)x + 3$ đạt cực đại tại điểm $x = 3$. **A.** $m = -1$. **B.** $m = -5$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = 1$. ***Hướng dẫn giải*** Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4 \Rightarrow y'' = 2x - 2m.$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ thì $y'(3) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5 \end{array}\right.$. • Với $m = 1, y''(3) = 2.3 - 2.1 = 4 > 0$ suy ra $x = 3$ là điểm cực tiểu.

+) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$. +) Hàm số đạt cực đại tại $x=x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$.	• Với $m=5, y''(3)=2.3-2.5=-4<0$ suy ra $x=3$ là điểm cực đại. ***Chọn C.***

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Hàm số $y=ax^3+x^2-5x+b$ đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2, giá trị của $H=4a-b$ là

A. $H=1$. **B.** $H=-1$. **C.** $H=-2$. **D.** $H=3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=3ax^2+2x-5 \Rightarrow y''=6ax+2$.

+) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1 \Rightarrow y'(1)=0 \Leftrightarrow a=1$.

+) Thay $a=1$ ta thấy $y''(1)=6+2=8>0$ nên $x=1$ là điểm cực tiểu.

+) Mặt khác ta có: $y(1)=2 \Leftrightarrow 1+1-5+b=2 \Leftrightarrow b=5$.

Vậy $H=4.1-5=-1$.

Chọn B.

Ví dụ 2: Hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0, f(0)=0$ và đạt cực đại tại điểm $x=1, f(1)=1$. Giá trị của biểu thức $T=a+2b-3c+d$ là

A. $T=2$. **B.** $T=3$. **C.** $T=4$. **D.** $T=0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Do hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0, f(0)=0$ và đạt cực đại tại điểm $x=1, f(1)=1$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f'(0)=0 \\ f(0)=0 \\ f'(1)=0 \\ f(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=0 \\ 3a+2b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow T=4.$$

Chọn C.

Bài toán 2. Tìm điều kiện của tham số để hàm số có cực trị

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Giá trị của m để hàm số $y=x^3+mx-1$ có cực đại và cực tiểu là

A. $m\ge 0$. **B.** $m\le 0$. **C.** $m>0$. **D.** $m<0$.

Hướng dẫn giải

Hàm số $y = x^3 + mx - 1$ có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay $3x^2 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Do đó $m < 0$.

Chọn D.

Chú ý: *Do hàm bậc ba có đạo hàm là tam thức bậc hai nên các yêu cầu sau: hàm số có cực trị, hàm số có cực đại và cực tiểu, hàm số có hai cực trị có cách làm giống nhau, tức là $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.*

Ví dụ 2: Với giá trị nào của *m* thì hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + x^2 + x + 7$ có cực trị?

A. $m \in (1; +\infty) \cup \{0\}$. **B.** $m < 1$.

C. $m \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$. **D.** $m \leq 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = mx^2 + 2x + 1$.

+) Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = x^2 + x + 7$, đồ thị là một parabol nên hiển nhiên có cực trị.

Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu.

+) Xét $m \neq 0$, để hàm số có cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Hợp cả hai trưởng hợp, khi $m < 1$ thì hàm số có cực trị.

Chọn B.

Chú ý: *Với bài toán hỏi "có cực trị" và hệ số của bậc ba (bậc cao nhất) có chứa tham số thì nên chia hai trường hợp: Hệ số của bậc cao nhất bằng 0 và khác 0.*

Ví dụ 3: Tìm các giá trị của *m* để hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 - (m-1)x + 2$ **không** có cực trị.

A. $0 < m < \frac{1}{4}$. **B.** $0 \leq m < \frac{1}{4}$.

C. $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$. **D.** $0 < m \leq \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = 3mx^2 - 6mx - m + 1$.

+) Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = x + 2$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không có cực trị, nhận $m = 0$.

+) Xét $m \neq 0$, hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 - 3m(1-m) \leq 0 \Leftrightarrow 12m^2 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{4}$.

Hợp cả hai trường hợp, khi $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$ thì hàm số không có cực trị.

Chọn C.

Dạng 3. Cực trị hàm bậc bốn trùng phương

Bài toán 1. Tìm tham số để hàm số có số điểm cực trị thỏa mãn đề bài

Phương pháp giải

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$, có đạo hàm là $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

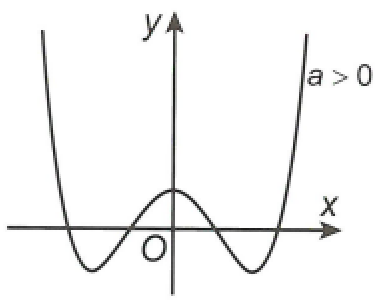
+ Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ab < 0$.

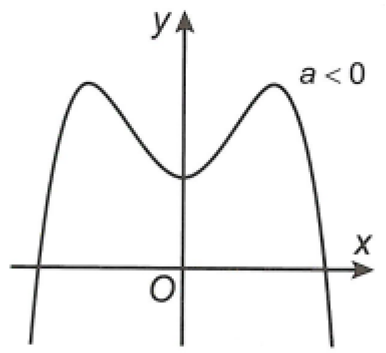
+ Đồ thị hàm số có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

+ Đồ thị hàm số hoặc có đúng một điểm cực trị hoặc có ba điểm cực trị, và luôn có một điểm cực trị nằm trên trục tung.

+ Đồ thị hàm số có ba cực trị:
  - Nếu $a > 0$ hàm số có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại;
  - Nếu $a < 0$ hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Chú ý rằng ba điểm cực trị của đồ thị hàm số luôn tạo thành một tam giác cân.

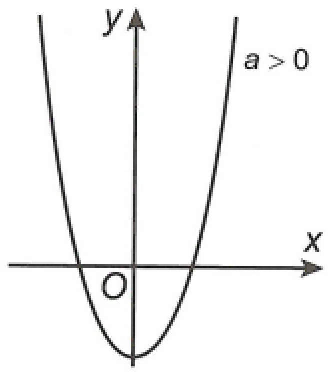


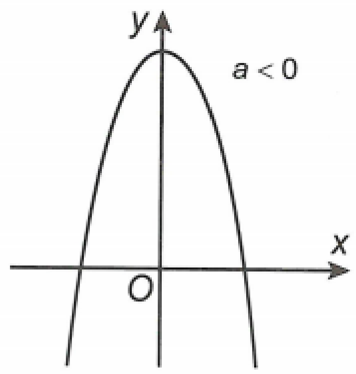


+ Khi hàm số có một cực trị:

  $a > 0$ thì điểm cực trị là điểm cực tiểu;

  $a < 0$ thì điểm cực trị là điểm cực đại.





+ Đồ thị hàm số $y=\left|ax^4+bx^2+c\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất (bảy cực trị) khi đồ thị hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị và đồ thị của nó cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

+ Đồ thị hàm số $y=\left|ax^4+bx^2+c\right|$ có ít điểm cực trị nhất (một cực trị) khi đồ thị hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có một điểm cực trị và đồ thị của nó không có điểm chung hoặc chỉ tiếp xúc với trục hoành.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Có bao nhiêu số nguyên $m\in\left[-20;20\right]$ để đồ thị hàm số $y=mx^4+\left(m^2-9\right)x^2+1$ có ba điểm cực trị?

A. 20. **B.** 19. **C.** 18. **D.** 17.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=4mx^3+2\left(m^2-9\right)x=2x\left[2mx^2+\left(m^2-9\right)\right]$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & \\ 2mx^2+m^2-9=0 & \quad (1)\end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt hay (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow 2m\left(m^2-9\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-3\\0<m<3\end{array}\right.$.

Vậy có 19 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Chọn B.

Ví dụ 2. Tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+3mx^2-4$ có ba điểm cực trị phân biệt và hoành độ của chúng trong khoảng $\left(-2;2\right)$ là

A. $\left(-\frac{8}{3};0\right)$. **B.** $\left(0;\frac{8}{3}\right)$. **C.** $\left(-\frac{3}{2};0\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=4x^3+6mx$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^2=-3m\ (2)\end{array}\right.$.

Để thỏa mãn đề bài phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0 và thuộc khoảng $\left(-2;2\right)$ $\Leftrightarrow 0<-\frac{3m}{2}<4\Leftrightarrow 0>m>-\frac{8}{3}$.

Chọn A.

Ví dụ 3. Biết rằng hàm số $y=x^4-2\left(m^2+1\right)x^2+2$ có điểm cực tiểu. Giá trị lớn nhất của cực tiểu là

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

$y' = 4x^3 - 4\left(m^2+1\right)x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2+1 \end{array}\right.$.

Rõ ràng phương trình $y' = 0$ luôn có ba nghiệm phân biệt.

Lập bảng biến thiên, dễ thấy $x = \pm\sqrt{m^2+1}$ là các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 2 - \left(m^2+1\right)^2 = 1 - \left(m^4 + 2m^2\right) \le 1$ (dấu $"="$ xảy ra khi $m = 0$).

Chọn A.

Ví dụ 4. Với giá trị nào của k thì hàm số $y = kx^4 + \left(k-1\right)x^2 + 1 - 2k$ chỉ có một cực trị?

A. $0 < k \le 1$. **B.** $0 \le k \le 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} k \ge 1 \\ k < 0 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} k \ge 1 \\ k \le 0 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

\+ Với $k = 0$, hàm số trở thành $y = -x^2 + 1$ có đồ thị là một parabol nên có đúng một cực trị. Do đó $k = 0$ thỏa mãn đề bài.

\+ Với $k \ne 0$. Ta có $y' = 4kx^3 + 2\left(k-1\right)x = 2x\left(2kx^2 + k - 1\right)$.

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì phương trình $2kx^2 + k - 1 = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow k\left(k-1\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \ge 1 \\ k < 0 \end{array}\right.$.

Kết hợp hai trường hợp ta được các giá trị cần tìm là $k \ge 1$ hoặc $k \le 0$.

Chọn D.

x=0 là nghiệm của phương trình $2kx^2 + k - 1 = 0$

Bài toán 2. Tìm điều kiện của tham số để hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại điểm x_0 cho trước.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Giá trị của m để hàm số $y = \left(m+1\right)x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ đạt cực đại tại $x = 2$ là

A. $m = \frac{4}{3}$. **B.** $m = -\frac{4}{3}$. **C.** $m = -\frac{3}{4}$. **D.** $\varnothing$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = 4\left(m+1\right)x^3 - 4mx \Rightarrow y'' = 12\left(m+1\right)x^2 - 4m$.

Để hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ thì $y'\left(2\right) = 0 \Rightarrow 32\left(m+1\right) - 8m = 0 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$.

Với $m = -\frac{4}{3}$ thì $y''\left(2\right) = 12\left(-\frac{4}{3}+1\right).2^2 - 4\left(-\frac{4}{3}\right) < 0$, suy ra $x = 2$ là điểm cực đại.

Chọn B.

Chú ý: *Nếu* $f'\ x_0\ = f''\ x_0\ = 0$ *thì ta lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu đạo hàm để kiểm tra.*

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}mx^2+x$ có $x=m$ là một điểm cực trị. Tổng các giá trị của m là

A. 1. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

$y'=2x^3-3mx+1\Rightarrow y''=6x^2-3m$.

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=m\Rightarrow y'(m)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

- Với $m=1$, ta có: $y''(1)=6-3>0$ $x=1$ là điểm cực tiểu (cực trị) nên $m=1$ thỏa mãn.
- Với $m=-\frac{1}{2}$, ta có: $y''\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}>0$ $x=-\frac{1}{2}$ là điểm cực tiểu (cực trị) nên $m=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn.

  Vậy tổng các giá trị của m thỏa mãn điều kiện trên là $1+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Chọn D.

Ví dụ 3. Biết đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có hai điểm cực trị là $A(0;2)$, $B(2;-14)$. Giá trị của $y(1)$ là

A. $y(1)=-5$. **B.** $y(1)=-4$. **C.** $y(1)=-2$. **D.** $y(1)=0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=4ax^3+2bx$.

Các điểm $A(0;2)$, $B(2;-14)$ thuộc đồ thị hàm số nên $\begin{cases} c=2 \\ 16a+4b+c=-14 \end{cases}(1)$.

Mặt khác, hàm số đạt cực trị tại điểm $x=2$, suy ra $32a+4b=0\ (2)$.

Từ $(1);(2)$ ta có $y=x^4-8x^2+2$.

Dễ thấy hàm số có các điểm cực trị là $A(0;2)$, $B(2;-14)$ nên $y=x^4-8x^2+2$ là hàm số cần tìm.

Khi đó $y(1)=-5$.

Chọn A.